電磁気学講義ノート３

萱沼

ラプラスの方程式の解

ラプラスの方程式は、境界条件を与えれば解はただ一つに定まる。境界条件に合わせて適当な座標系を選んで方程式を解けばよい。ここでは、球座標（極座標ともいう）での一般解を調べよう。電位 V に対する球座標系でのラプラスの方程式は、講義ノート１でやったように

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = 0. \tag{1}$$

この解を $V(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$ とおいて変数分離法を適用する。(1) 式に代入し、両辺を V で割ると

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}r^2\frac{dR}{dr} + \frac{1}{Y}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{Y}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial Y}{\partial\phi} = 0. \tag{2}$$

すなわち

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}r^2\frac{dR}{dr} = -\frac{1}{Y}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{Y}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial Y}{\partial\phi}. \tag{3}$$

この式の左辺は r のみの関数、右辺は θ,ϕ のみの関数である。それらが常に等しいためには、両辺は定数でなければならない。その定数を μ とおくと、

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{\mu}{r^2}R = 0, \tag{4}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + \mu Y = 0. \tag{5}$$

(4) 式の一般解は a, b を任意の数として

$$R(r) = ar^n + \frac{b}{r^{n+1}} \tag{6}$$

で与えられることは直接代入して確かめられる。ここに $\mu = n(n+1)$. ただし、n はこの段階ではまだ整数とは決まらない任意の実数であるが、多くの問題では物理的要請から整数と決まる。よって

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2}R = 0, \tag{7}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + n(n+1)Y = 0. \tag{8}$$

(8) 式をさらに変数分離する。$Y(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ とおいて代入し、両辺を Y で割れば、同様の理屈から

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left\{n(n+1) + \frac{\nu}{\sin^2\theta}\right\}\Theta = 0, \tag{9}$$

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\Phi - \nu\Phi = 0 \tag{10}$$

境界条件 $\Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi)$ を満足する (10) 式の解は

$$\begin{aligned}\Phi(\phi) &= C_1\cos m\phi + C_2\cos m\phi,\\ &= A_1 e^{im\phi} + A_2 e^{-im\phi}\end{aligned} \tag{11}$$

で与えられる。ただし m は整数で $\nu=-m^2$ である。また $C_1, C_2.A_1, A_2$ は任意の数である。このとき (9) 式は

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}\Theta=0. \tag{12}$$

ここで $\cos\theta=x$ とおき

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\theta}=\frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx}=-\sin\theta\frac{d}{dx},\\ &\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}=-\frac{d}{dx},\\ &\sin\theta\frac{d}{d\theta}=-(1-x^2)\frac{d}{dx}\end{aligned} \tag{13}$$

などに注意して、$\Theta(\theta)=y(x)$ とおけば

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}y=0. \tag{14}$$

これをルジャンドルの陪微分方程式とよぶ。とくに解が ϕ に依存しないときには $m=0$ とおいた式になる。これををルジャンドルの微分方程式とよぶ。物理的理由から n は $n=0,1,2\cdots$ と負でない整数となることが多い。$m=0$ で $n=0,1,2\cdots$ のとき (14) 式の解 $P_n(x)$ は多項式（ルジャンドルの多項式）となる。