電磁気学講義ノート１

萱沼

直交曲線座標におけるラプラスの方程式

１．直交曲線座標

(x,y,z) の関数¥

$$u = F(x,y,z), \quad v = G(x,y,z), \quad w = H(x,y,z) \tag{1}$$

が逆に解けて、$x = f(u,v,w), \quad y = g(u,v,w), \quad z = h(u,v,w)$ と書けるとき、(u,v,w) を「座標」とみなすことができる。これを「曲線座標」とよぶ。$u = F(x,y,z) = C_1$ はある曲面を表す。同様に $v = C_2$、$w = C_3$ も曲面を表す。$v = C_2$ と $w = C_3$ の二つの曲面の交わりは一つの曲線になる。この曲線上では u だけが変化。これを u 曲線と名づける。同様に v 曲線、w 曲線も定義できる。１点 P を通る３本の曲線 u 曲線、v 曲線、w 曲線が直交するとき、(u,v,w) を「直交曲線座標」とよぶ。u 曲線、v 曲線、w 曲線の単位接線ベクトルを、それぞれ $\mathbf{u}, \quad \mathbf{v}, \quad \mathbf{w}$ で表す。

例　極座標（球面座標）$(x,y,z) \to (r,\theta,\phi)$

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta \tag{2}$$

を極座標（または球面座標）とよぶ。極座標は直交曲線座標である。

２．基本量

デカルト座標における微小変位 (dx,dy,dz) に対して、$ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = dx^2+dy^2+dz^2$ を線素とよぶ。(u,v,w) が直交曲線座標のとき、$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v,w)$ より

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dv + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}dw. \tag{3}$$

$\partial\mathbf{r}/\partial u, \quad \partial\mathbf{r}/\partial v, \quad \partial\mathbf{r}/\partial w$ は、それぞれ $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ に平行だから、

$$\begin{aligned} ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} &= (\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u})du^2 + (\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v})dv^2 + (\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w})dw^2 \\ &= (h_1 du)^2 + (h_2 dv)^2 + (h_3 dw)^2. \end{aligned} \tag{4}$$

ここに

$$h_1 = \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}} = \sqrt{\Big(\frac{\partial x}{\partial u}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial y}{\partial u}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial u}\Big)^2}, \quad etc. \tag{5}$$

u 曲線、v 曲線、w 曲線の弧長 ds_1, ds_2, ds_3 はそれぞれ $ds_1 = h_1 du, ds_2 = h_2 dv, ds_3 = h_3 dw$ と表される。したがって

$$\nabla u = \frac{du}{ds_1}\mathbf{u} = \frac{1}{h_1}\mathbf{u}, \quad \nabla v = \frac{1}{h_2}\mathbf{v}, \quad \nabla w = \frac{1}{h_3}\mathbf{w}. \tag{6}$$

３．直交曲線座標におけるラプラシアン

任意のベクトル関数 $\mathbf{A}$ は、$\mathbf{A}$ の始点における $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ により $\mathbf{A} = A_u\mathbf{u} + A_v\mathbf{v} + A_w\mathbf{w}$ と書ける。スカラー関数 $\varphi(u,v,w) = \varphi(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ に対して

$$\begin{aligned} \nabla\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\nabla v + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\nabla w \\ &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathbf{u} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathbf{v} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\mathbf{w}. \end{aligned} \tag{7}$$

ベクトル関数 $\mathbf{A} = A_u\mathbf{u} + A_v\mathbf{v} + A_w\mathbf{w}$ に対して発散を計算する。$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ の微分もゼロにならないので注意をする。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot A_u\mathbf{u} + \nabla \cdot A_v\mathbf{v} + \nabla \cdot A_w\mathbf{w}. \tag{8}$$

ここで

$$\mathbf{u} = h_2h_3\nabla v \times \nabla w, \quad \mathbf{v} = h_3h_1\nabla w \times \nabla u, \quad \mathbf{w} = h_1h_2\nabla u \times \nabla v \tag{9}$$

に注意して (8) 式の各項の発散を計算する。

$$\nabla \cdot A_u\mathbf{u} = \nabla(A_uh_2h_3) \cdot \nabla v \times \nabla w + A_uh_2h_3\nabla \cdot (\nabla v \times \nabla w). \tag{10}$$

第１項で

$$\nabla(A_uh_2h_3) = \frac{\partial}{\partial u}(A_uh_2h_3)\nabla u + \frac{\partial}{\partial v}(A_uh_2h_3)\nabla v + \frac{\partial}{\partial w}(A_uh_2h_3)\nabla w \tag{11}$$

と $\nabla v \cdot (\nabla v \times \nabla w) = 0$　などより

$$\text{第１項} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u}(A_uh_2h_3)$$

第２項は $\nabla \cdot (\nabla v \times \nabla w) = \nabla w \cdot (\nabla \times \nabla v) - \nabla v \cdot (\nabla \times \nabla v) = 0$ よりゼロ。他の項も同様だから

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\Big\{\frac{\partial}{\partial u}(h_2h_3A_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_3h_1A_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_1h_2A_w)\Big\} \tag{12}$$

例　極座標 (2) について

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\sin\theta \tag{13}$$

と求められる（確認せよ）。よって、スカラー関数 $V(r, \theta, \phi)$ について

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{v}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{w}_\phi \tag{14}$$

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \tag{15}$$