電磁気学講義ノート０

萱沼

スカラー関数の勾配（gradient）について

１変数の関数 $y = f(x)$ のグラフの、ある点での傾きを知るには、その点における微係数 df/dx を計算すればよい。多変数の関数についても同様だが、この場合「どちらの方向に傾きを測るか？」という問題が付け加わる。それを決めるのがスカラー関数の勾配 (gradient）である。

(x, y, z) の関数 $u = u(x, y, z)$ が与えられているとする。$u(\mathbf{r}) = u(x, y, z) = C$ （定数）は一つの曲面を表す。$u(\mathbf{r}) = C$ 上の点 P において、任意の微小変位ベクトル $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ に対する u の微小変化 du は

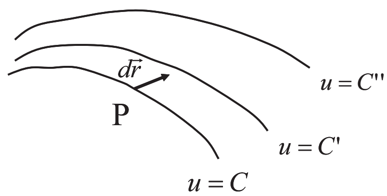
$$\begin{aligned} du &= u(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = \nabla u \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \tag{1}$$

と書ける。この段階では $d\mathbf{r}$ の向きは自由である。∇u の性質（向きと大きさ）を知るために、以下では特別の方向に $d\mathbf{r}$ をとってみる。

（１）$u(\mathbf{r}) = C$ で表される面内にあって P を通る任意の曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ を考える。t は曲線をあらわすパラメータ。この曲線上では $u = u(x(t), y(t), z(t))$ と書ける。この曲線にそって $d\mathbf{r}$ をとると、$u =$ 一定 だから

$$\begin{aligned} 0 = \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= \nabla u \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \end{aligned} \tag{2}$$

ここで $d\mathbf{r}/dt$ は曲線の接線ベクトルであるが、上式は ∇u がこの接線ベクトルに直交していることを示している。面内にある P 点を通る任意の曲線に垂直であることから、∇u は P 点で $u = C$ に垂直。すなわち単位法線ベクトルを $\mathbf{u}$ とすれば $\nabla u = a\mathbf{u}, \quad (|\mathbf{u}| = 1)$ と書ける。



（２）∇u の大きさ a を決めるために、今度は $d\mathbf{r}$ として $\mathbf{u}$ 方向の直線を考える。

$$|d\mathbf{r}|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

より $d\mathbf{r} = ds\mathbf{u}$. ただし ds は弧長。よって (1) 式より

$$du = \nabla u \cdot d\mathbf{r} = a\mathbf{u} \cdot ds\mathbf{u} = ads \tag{3}$$

すなわち $a = du/ds$. まとめて

$$\nabla u = \frac{du}{ds}\mathbf{u}. \tag{4}$$

ここで du/ds は、法線方向に単位長さ ds だけ移動したときの u の変化率である。

（3）最後に $d\mathbf{r}$ として、P を通る任意の向きの直線 g の方向への微小変位を考えてみよう。g 方向への単位ベクトルを $\mathbf{g}$、P からの弧長を s とすれば g に沿っては $u = u(x(s), y(s), z(s))$ と書けるから

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{ds} \tag{5}$$

ここで

$$\mathbf{g} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) \tag{6}$$

に注意すれば

$$\frac{du}{ds} = \mathbf{g} \cdot \nabla u = |\nabla u| \cos\theta \tag{7}$$

ただし、θ は $\mathbf{g}$ と ∇u のなす角である。この式から du/ds が最大になるのは、$\theta = 0$ のとき、すなわち $\mathbf{g}$ が ∇u 方向のときであり、その最大値は $|\nabla u|$ であることがわかる。すなわち ∇u は曲面群 $u = C$ の「最大傾斜線」の方向を向いている。