

2022年度 春（4月）入学

**物理学専攻（博士前期課程） 専門科目問題**

（ 13：00 ～ 16：30 ）

下記の6科目の中から**3科目を選択**して解答すること。

（ 配点 合計300点 ）

| 科目番号 | 科目名      |       | ページ   |
|------|----------|-------|-------|
| I    | 力学       | ----- | 1～2   |
| II   | 電磁気学     | ----- | 3～4   |
| III  | 量子力学     | ----- | 5～6   |
| IV   | 統計物理学    | ----- | 7～8   |
| V    | 地球物質科学   | ----- | 9～10  |
| VI   | 地球ダイナミクス | ----- | 11～12 |

- 注意**
- (1) 解答用紙6枚の他に、計算用紙（白紙）2枚を配布する。
  - (2) 解答は1科目ずつ別の**解答用紙（1科目につき2枚）**に記入すること。
  - (3) 各解答用紙には、選択する科目の**科目番号**、**科目名**、**解答用紙番号（1または2）**、**受験番号**、**氏名**を必ず明記すること。あわせて解答用紙の下にある**科目番号**、**解答用紙番号**も必ず明記すること。
  - (4) 解答にあたっては、各問題に記載の注意事項をよく読むこと。
  - (5) 試験終了後、解答用紙は全て回収する。



(余白)

|   |    |
|---|----|
| I | 力学 |
|---|----|

問1. 質量  $m$  の惑星 P が, 質量  $M (\gg m)$  の太陽 O の周りを万有引力によって、太陽を含む平面上を楕円軌道を描いて運動している。太陽 O を原点としたとき、惑星 P の位置を平面極座標  $(r, \theta)$  で表す。このとき、以下の問いに答えよ。ここで、万有引力定数を  $G$  とし、太陽は動かないものとする。

- (1) 惑星 P に関するラグランジアンを求めよ。
- (2) 一般化座標  $r, \theta$  に関する一般化運動量をそれぞれ  $p_r, p_\theta$  としたとき、 $p_r, p_\theta$  を求めよ。
- (3) ハミルトニアン  $H(r, \theta, p_r, p_\theta)$  を求めよ。
- (4) ハミルトンの正準方程式より、次の2式が成り立つことを示せ。

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{GMm}{r^2} \quad \dots \text{式1}$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \quad \dots \text{式2}$$

- (5) 式2は、ケプラーの第2法則を表していることを示せ。
- (6) 式1に対して、 $r = u^{-1}$ と置くことにより、次の  $u$  に関する2階微分方程式が得られることを示せ。ここで、 $h = r^2\dot{\theta}$  とする。

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2}$$

- (7) (6) の微分方程式を解き、正の定数  $l, e$  を用いることにより、以下の2次曲線の式が得られることを示せ。 $\theta = 0$  のとき  $r$  は極小になるものとする。また、 $l$  を  $G, M, h$  を用いて表せ。

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \theta}$$

- (8) 楕円の長半径を  $a$  , 短半径を  $b$  とする。このとき、面積速度が一定であることを利用して、惑星の楕円運動の周期を、 $a, b, h$  を用いて表せ。
- (9) ケプラーの第3法則を説明せよ。また、(8) で求めた周期の式は、ケプラーの第3法則と同等であることを示せ。以下の関係を用いても良い。

$$b = \frac{l}{\sqrt{1 - e^2}} = a\sqrt{1 - e^2}$$

- (10) 図1のように、直線  $OP$  と惑星  $P$  の速度ベクトル  $v$  のなす角を  $\varphi$  とする。重力ポテンシャルの基準を無限遠にとったときの惑星の力学的エネルギーを  $E$ 、惑星  $P$  の太陽  $O$  のまわりの角運動量の大きさを  $L$  とし、 $r$  に関する2次方程式を  $r, \varphi, E, G, L, m, M$  を用いて表せ。
- (11) 惑星が太陽に最も近いときと、最も遠いときは、共に  $\sin^2 \varphi = 1$  となることを利用して、惑星の力学的エネルギー  $E$  を  $a, G, m, M$  を用いて表せ。

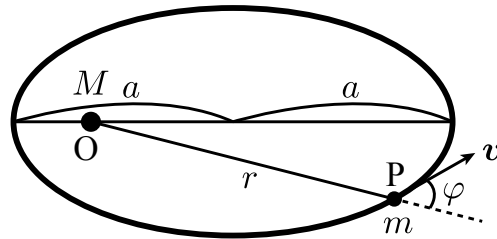


図1

問2. 図2のように、滑らかな水平台の上に半径  $a$ 、質量  $M$  の一様な円板があり、円板の外周に点  $A$  がある。また、円板の中心  $O$  と点  $A$  を結ぶ線分  $OA$  上に点  $B$  があり、線分  $OB$  の長さを  $b$  ( $0 \leq b < a$ ) とする。この円板は、水平台に固定された点  $B$  を通り円板に垂直な回転軸の周りに一定の角速度  $\omega_0$  で回転している。あるとき、突然、回転軸が、点  $A$  を通り円板に垂直な軸に瞬時に移動し、円板は水平台に固定された点  $A$  を中心とする一定の角速度  $\omega$  の回転にかわった。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) この円板の中心  $O$  を通り円板に垂直な回転軸のまわりの慣性モーメントを書け。
- (2) 点  $B$  のまわりに回転しているとき、点  $B$  のまわりの円板の角運動量を求めよ。
- (3) 回転軸が移動する直前の、点  $A$  のまわりの円板の角運動量を求めよ。
- (4) 角速度  $\omega$  と角速度  $\omega_0$  の関係を求めよ。

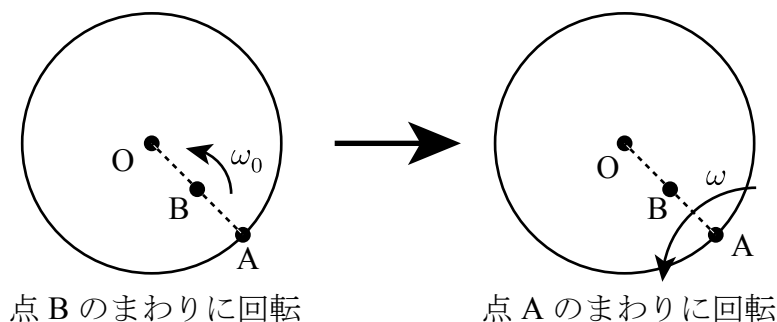


図2

## II

## 電磁気学

電気定数（真空の誘電率）を $\epsilon_0$ ，磁気定数（真空の透磁率）を $\mu_0$ とする。

問1. 以下の問いに答えよ。

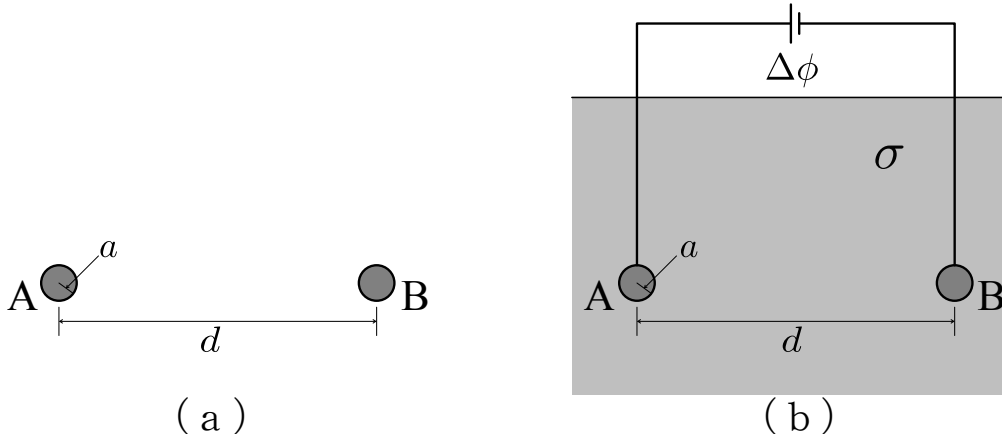


図1

- (1) 図1 (a) のように、ともに半径  $a$  の導体球 A と B を真空中に配置した。導体球の中心間の距離は  $d$  で、 $d$  は  $a$  に比べて十分大きいものとする。
- (i) この二つの導体球 A と B にそれぞれ電荷  $+q$  と  $-q$  をあたえたとき、それぞれの導体球表面の電位を、 $\epsilon_0, a, d, q$  を用いて表せ。ただし、無限遠を電位の基準点とする。
- (ii) この二つの導体球をコンデンサーとみなしたときの静電容量  $C$  を、 $\epsilon_0, a, d$  を用いて表せ。
- (2) 図1 (b) のように、ともに半径  $a$  の導体球 A と B を電気伝導度  $\sigma$  の電解質溶液中に浸した。導体球の中心間の距離は  $d$  で、 $d$  は  $a$  に対して十分大きいものとする。また、導体球の液面からの距離は  $d$  に比べて十分大きいものとする。この導体球間に電位差  $\Delta\phi$  をかけた。
- (i) 電解質溶液中の任意の点の位置ベクトルを  $\mathbf{r}$  とする。位置  $\mathbf{r}$  での電流密度  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  と、電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  の間に成り立つ関係式を書け。
- (ii) 導体球間に流れる電流  $I$  を  $a, d, \sigma, \Delta\phi$  を用いて表せ。ただし、導体球および導線の電気抵抗は無視できるものとする。

問2. 図2のように真空中に幅  $x$  の非常に狭い隙間を持つ, 中心軸の長さが  $\ell$  のドーナツ状の鉄心がある。この鉄心に導線を  $N$  回巻きつけてコイルを作り, 定常電流  $I$  を流した。このとき以下の問いに答えよ。ここで, 鉄の透磁率を  $\mu$  とする。

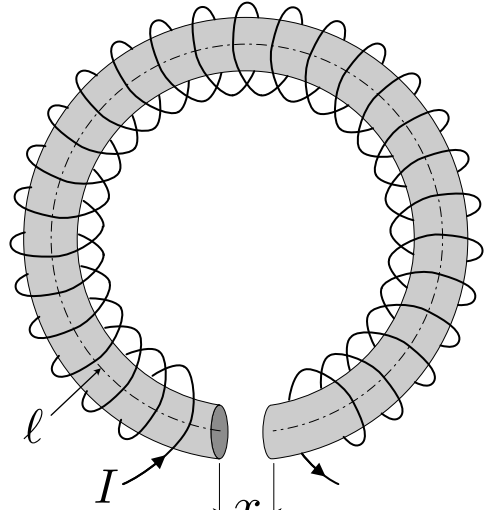


図2

- (1) 鉄心内の中心軸に沿った方向の一樣な磁束密度の大きさを  $B$  とする。このとき, 隙間の部分に生じる磁束密度の大きさを答えよ。
- (2) 鉄心内および隙間での磁場の強さをそれぞれ  $H$  および  $H_0$  とする。 $H$  および  $H_0$  を  $B, \mu, \mu_0$  のうち必要なものを用いて表せ。
- (3)  $B$  を  $\mu, \mu_0, \ell, x, N, I$  を用いて表せ。
- (4) 鉄心の太さが一樣で断面積が  $A$  のとき, このコイルの自己インダクタンス  $L$  を  $\mu, \mu_0, \ell, x, N, A$  を用いて表せ。

問3. 以下の問いに答えよ。

- (1) 真空中におけるマクスウェルの方程式を記した上で, それぞれの式の意味を簡潔に述べよ。ただし, 電場と磁場にはそれぞれ  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  を用いよ。そのほかに必要な物理量は, 定義したうえで用いて良い。
- (2) 真空中の電磁波について, 電場  $\mathbf{E}$  に関する波動方程式を導け。ただし,  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$  の関係を用いてよい。
- (3) 真空中で  $z$  方向に進行する電磁波 (平面波) がある。時刻  $t$  における電場  $\mathbf{E}(z, t)$  の  $x, y, z$  成分,  $E_x, E_y, E_z$  がそれぞれ
 
$$E_x = E_0 \sin(\omega t - kz), \quad E_y = E_z = 0$$
 で与えられるとき, 以下の問いに答えよ。ここで,  $E_0, \omega, k$  はそれぞれ電場の振幅, 角振動数,  $z$  方向の波数を表す。
  - (i) 上記の  $E_x$  が (2) で求めた波動方程式を満たすことから,  $\omega$  と  $k$  の間に成り立つ関係式を求めよ。
  - (ii) この電磁波の磁場  $\mathbf{B}(z, t)$  の  $x, y, z$  成分,  $B_x, B_y, B_z$  を求めよ。
  - (iii) この電磁波のエネルギー密度  $U$  を求めよ。
  - (iv) 電磁波のポインティングベクトルの大きさ  $S(z, t)$  を求め, (iii) で求めた  $U$  との関係性を答えよ。

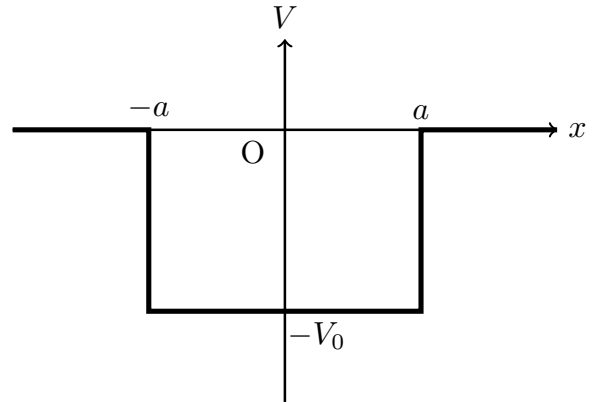
### Ⅲ

## 量子力学

問 1. 右図のような 1 次元ポテンシャル  $V(x)$  の中を質量  $m$  の粒子が運動している。

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$$

ここで、 $a$  と  $V_0$  は正の定数である。粒子のエネルギー  $E$  が  $-V_0 < E < 0$  の範囲にある束縛状態について以下の問いに答えよ。



- (1) シュレーディンガー方程式の定常解の区間  $x < -a$  と区間  $a < x$  における形をそれぞれ求めよ。ただし、解答は  $k = \sqrt{-2mE/\hbar^2}$  を用いて表すこと。
- (2) ポテンシャルが偶関数であるため、シュレーディンガー方程式の定常解は偶関数、または奇関数のどちらかになる。区間  $-a < x < a$  における偶関数と奇関数の定常解の形を求めよ。ただし、解答は  $k' = \sqrt{2m(E + V_0)/\hbar^2}$  を用いて表すこと。
- (3) 区間  $-a < x < a$  の奇関数の解と区間  $a < x$  の解に対して  $x = a$  での境界条件を適用すると次の関係式が得られることを示せ。

$$\frac{k'}{\tan k'a} = -k$$

問 2. ある 2 準位系のハミルトニアンが  $\omega > 0$  を定数として

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\omega \\ \hbar\omega & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるとする。

- (1)  $\hat{H}$  の固有値を求めよ。



- (2) (1) で求めた固有値を  $E_1, E_2$  ( $E_1 < E_2$ ) とするとき,  $E_1, E_2$  に対する規格化された固有ベクトル  $\varphi_{E_1}, \varphi_{E_2}$  を求めよ。
- (3) 時刻  $t = 0$  における系の状態が  $\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  であるとき, 時刻  $t \geq 0$  における状態  $\psi(t)$  を求めよ。

問3. 3次元空間内の点  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  における磁場を  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  とする。この磁場の中を運動する電荷  $q$ , 質量  $m$  の粒子のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}))^2$$

で与えられる。ここで,  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A_x, A_y, A_z)$  は  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  のベクトルポテンシャルである。

- (1)  $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}})$  とおくと, 次の関係式が成り立つことを示せ。

$$[\hat{P}_x, \hat{P}_y] = i\hbar q B_z$$

- (2)  $z$  軸方向の一様な磁場  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  を与えるベクトルポテンシャルは  $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$  ととることができる。このときのハミルトニアンの固有値問題

$$\hat{H}\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x})$$

を考える。 $\alpha, \beta$  を定数として

$$\psi(\mathbf{x}) = \varphi(\xi) \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\alpha y + \beta z)\right), \quad \xi = x - \frac{\alpha}{qB}, \quad \omega = \frac{qB}{m}$$

とおくと,  $\varphi(\xi)$  は角振動数が  $\omega$  で固有エネルギーが  $E - \frac{\beta^2}{2m}$  の1次元調和振動子のシュレーディンガー方程式を満たすことを示せ。

## IV

## 統計物理学

注意： $T$  は絶対温度を表す。ボルツマン定数を  $k_B$  とし、 $\beta = (k_B T)^{-1}$  とする。

問1. 閉じた系 A が絶対温度  $T$  の熱浴に接しているとする。A における物理量  $Q$  の平均を  $\overline{Q}$  で表すとして、以下の問いに答えよ。なお、A の体積は一定とする。

- (1) 量子数  $n = 0, 1, 2, \dots$  で表される状態のエネルギーが  $E_n$  で与えられる時、その状態が実現する確率  $P_n$  を求めよ。ただし分配関数を  $Z$  とし、 $Z$  の定義式も書くこと。
- (2) エネルギーの平均値  $\overline{E}$  を  $Z$  と  $\beta$  で表せ。
- (3)  $\frac{d\overline{E}}{d\beta}$  を  $\overline{E}$  と  $\overline{E^2}$  で表せ。
- (4) エネルギーの揺らぎの大きさの二乗  $\sigma^2 \equiv \overline{(E - \overline{E})^2}$  を  $T$  と熱容量  $C \equiv \frac{d\overline{E}}{dT}$  で表せ。
- (5)  $\alpha$  を正の整数とする。A を  $\alpha$  個合わせた系を考えると、その系の体積やエネルギーの平均  $\overline{E}$  は  $\alpha$  倍になるが、相対的な揺らぎの大きさ  $\frac{\sqrt{\sigma^2}}{\overline{E}}$  は何倍になるか。 $\alpha$  を用いて答えよ。
- (6) 系 A においてエネルギーが  $E$  となる量子状態数を  $W(E)$  とする。A のエネルギーが  $E$  の時のエントロピー  $S(E)$  を  $W(E)$  を用いて表せ。
- (7) 系 A が孤立している場合の A の絶対温度  $T_A$  をそのエネルギー  $E$  とエントロピー  $S$  で表せ。
- (8) 再び A が絶対温度  $T$  の熱浴に接している場合を考える。この場合にエネルギーが  $E$  となる確率を  $P(E)$  とする。量子状態が十分多く、また量子状態間のエネルギーの差が十分小さい場合、エネルギー  $E$  を連続変数として扱うことができる。 $\frac{dP(E)}{dE} = 0$  のとき、 $T_A$  と熱浴の温度  $T$  が等しいことを示せ。

問2. 以下のような1次元イジングモデルを考える。 $s_j = \pm 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  はスピンの状態を表す変数であり, 系のエネルギーは

$$E(s_1, s_2, \dots, s_N) = J \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1}$$

で表される。 $J$  は正の定数であり, 隣接するスピンの向きが逆向きの方がエネルギーが低いことに注意せよ。系が絶対温度  $T$  の熱浴に接しており, 外部磁場はかかっていないとして, 以下の問いに答えよ。いずれも  $N$  は有限のまま扱うこと。

- (1) 取りうる全ての状態数  $W$  を求めよ。
- (2)  $X \equiv \sum_{s_1=\pm 1} \exp(-\beta J s_1 s_2)$  を求め,  $X$  の値が  $s_2$  の値に依存しないことを示せ。
- (3) 分配関数  $Z$  を求めよ。
- (4) ヘルムホルツの自由エネルギー  $F$  を求めよ。
- (5) エントロピー  $S$  を求めよ。
- (6) 高温極限  $T \rightarrow \infty$  でのエントロピー  $S_\infty$  を求めよ。
- (7) 低温極限  $T \rightarrow 0$  でのエントロピー  $S_0$  を求めよ。
- (8) (7) の極限において縮退している状態数を答えよ。また, その理由を説明せよ。

問1. 次の(1)～(5)の用語のうち3つを選び、それぞれ3～5行程度で説明しなさい。

- (1) 適合元素と不適合元素 (調和元素と非調和元素)
- (2) 分別結晶作用
- (3) 古地磁気極と極移動曲線
- (4) 等粒状組織と斑状組織
- (5) 火山フロント

問2. 火成岩は、マグマが地球表層部で活動して生じた岩石である。初生玄武岩マグマは上部マントル付近で生じ、リソスフェア内部を移動して地表に噴出する。火成岩の形成した深さや噴出する環境(噴出場)によって、火成岩の化学組成や火成岩体の構造には多様性がみられる。次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1) 次の文章で、括弧①～⑤に入るべき適切な語句を答えなさい。

主要な玄武岩質マグマは、噴出場ごとに異なる深度で融解すると考えられる。これらマグマの生成条件は、( ① )の共存関係に基づく岩石の相平衡実験結果により推定されている。例えば( ② )ではアセノスフェアが浅く、そこで噴出する( ③ )は比較的浅い深度で生じるが、大陸縁・島弧にみられる( ④ )は( ③ )に比べてより深い深度で生じる。更にダイヤモンドを含むキンバーライトマグマは深さ 150km 以深で生じる。日本列島の横断面をみると( ⑤ )側で( ④ )が噴出することから、( ⑤ )側のマグマがより深い深度で形成され、列島横断方向で生成条件が異なっていると考えられる。

(2) 火成岩体には、岩石が産出する時の環境と形成過程の相違から、3つの区分がある。それぞれの名称を答えなさい。

(3) 地下のマグマの移動について、次の語句を用いて説明しなさい。

<語句> 開口割れ目・岩脈・応力・密度

問3. 堆積物の形成には、流体による粒子の削剥・運搬・沈降作用が重要と考えられている。図1と図2は、流体内部の粒子のふるまいを概念的に説明した鉛直断面である。図1は流体内部の粒子の分布とふるまいを示し、破線の矢印は大きな粒子の移動軌跡を表す。図2は流体最下部における粒子形状と流線（局所的な流れの向き）の関係を表す。但し、粒子a、粒子c内部の太矢印は、粒子に働く力を表す。図1, 2共に、A, Bは流体内に生じた「ある領域」を示している。次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

- (1) 図1の領域Aで主に起こる粒子の運搬様式(1つ)と、領域Bで主に起こる運搬様式(1つ)を、それぞれあげなさい。
- (2) 図2の粒子a, b, cについて、粒子の形状と削剥・運搬のされやすさについて、それぞれ説明しなさい。
- (3) 領域Aと領域Bでは、流れの性質が異なると考えられている。領域A, 領域Bの流れの性質を表す名称を答え、レイノルズ数( $R_e$ )を用いてその違いを説明しなさい。但し、流体の密度・深さ(厚さ)は一定とする。

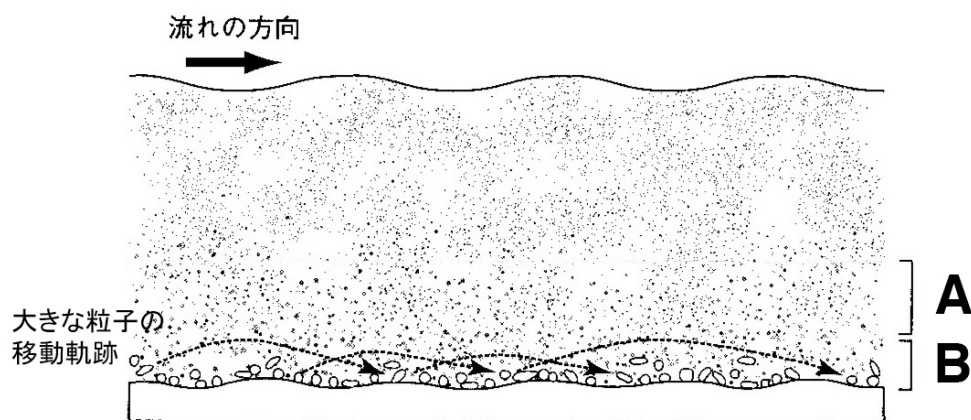


図1

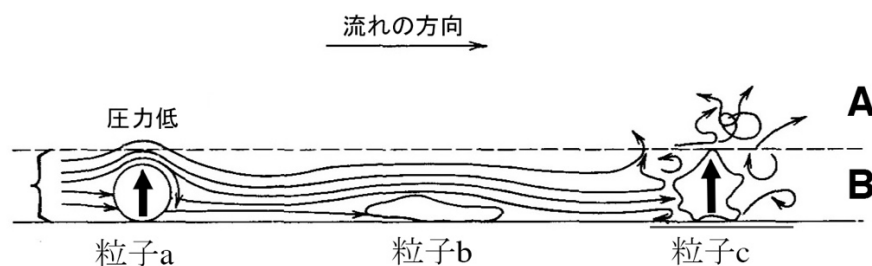


図2

出典：箕浦・池田，2011，地球のテクトニクスI 堆積学・変動地形学，及び Fritz and Moore, 1988, Basics of Physical Stratigraphy and Sedimentology を一部改変。

|    |          |
|----|----------|
| VI | 地球ダイナミクス |
|----|----------|

次の問（１）～（６）のうち５問を選択し、それぞれ簡潔に答えなさい。必要であれば、解答に図を用いてもよい。

（１） 図１に模式的に示すように、東北日本と西南日本に分布する活断層では、その方向やずれの向きに違いがある。これらから推定される東北日本と西南日本の最大、中間、最小圧縮主応力軸の向きを示しなさい。

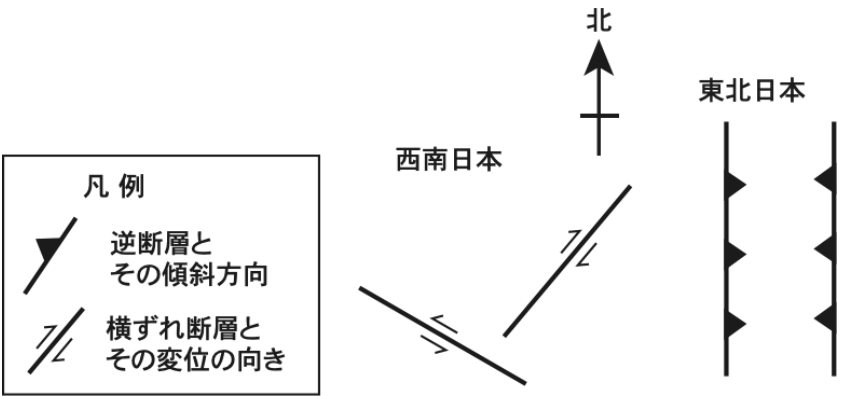


図 1

- （２） 形成年代が古い海底ほど水深が深くなる理由を説明しなさい。
- （３） 四万十帯、美濃-丹波帯などの付加体は、海洋プレートの形成、移動と沈み込みに伴って形成され、それぞれ異なる場所や環境で形成された、玄武岩、石灰岩、チャート、珪質泥岩、砂岩泥岩互層などから構成されている。このうち、チャートと砂岩泥岩互層が、それぞれどのような場所で、どのように形成されたと考えられるか説明しなさい。
- （４） 氷河性海面変動に伴って、海水中の酸素同位体比  $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$  が変化するしくみを説明しなさい。

- (5) 図2はある考古学遺跡の発掘現場の地層断面で、c層が液状化して、その上のb層に貫入しているのが観察された。この液状化が大地震によって引き起こされたものと仮定し、その大地震の起きた時期について、この地層断面から考えられることを説明しなさい。

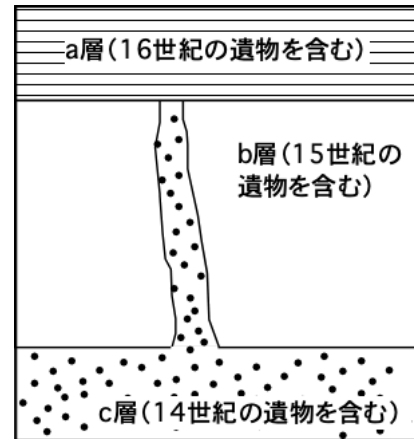


図 2

- (6) 親元素 P から娘元素 D への放射壊変を利用した放射年代測定法について考える。なお、D は安定同位体でそれ以上放射壊変せず、Ds は D の安定同位体である。図3の白丸 A, B は、岩石形成時（鉱物晶出時）に、異なる鉱物中の元素比 P/Ds は異なるが、同位体比 D/Ds は等しいことを示している。また、黒丸 A', B' と実線は、1000 万年後の P/Ds, D/Ds とアイソクロンを示している。解答用紙に図3の概略を写し、岩石形成から 2000 万年後の鉱物中の P/Ds, D/Ds (A'' と B'') とアイソクロンをその図に示し、なぜそのようになるのか説明しなさい。

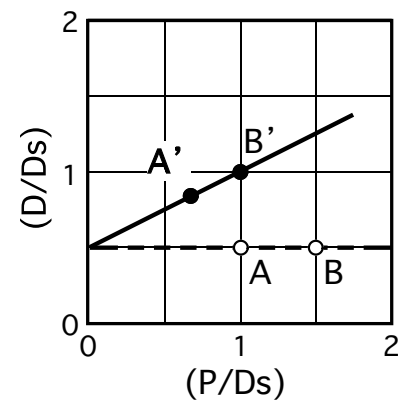


図 3

し、岩石形成から 2000 万年後の鉱物中の P/Ds, D/Ds (A'' と B'') とアイソクロンをその図に示し、なぜそのようになるのか説明しなさい。

(余白)



